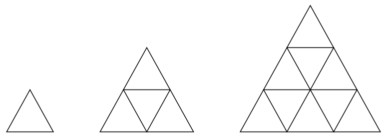
MD'2010, zadanie domowe nr 2

termin: 2010-03-11

Znajdź liczbę trójkątów na siatce trójkątnej o boku n.
PRZYKŁAD: dla $n = 1, 2, 3$ liczba trójkątów to, odpowiednio, 1, 5, 13.



UWAGA: Poprawność swojego rozwiązania możesz zweryfikować tu:
`http://www.spoj.pl/problems/TRICOUNT/`

Zadanie 2

Xilexio

W opisie ustalamy że siatka trójkątna ma podstawę poziomo i jest zwrócona do góry. Oznaczenia:

t_n – ilość trójkątów w siatce trójkątnej o boku długości n * długość boków małego trójkąta

Δ_k^+ – ilość nowych trójkątów (które były w siatce o boku n - 1, ale nie w siatce o boku n) rozmiaru k zwróconych do góry

Δ_k^- – ilość nowych trójkątów (które były w siatce o boku n - 1, ale nie w siatce o boku n) rozmiaru k zwróconych w dół

Siatka trójkątna o boku 1 ma 1 trójkąt. Siatka trójkątna o boku n w stosunku do siatki trójkątnej o boku n - 1 ma dodatkowe trójkąty - te zwrócone do góry to wszystkie o podstawie leżącej w podstawie siatki trójkątnej, a te w dół to wszystkie o wierzchołku na podstawie siatki trójkątnej. Zauważmy że tych zwróconych w dół jest tyle, jak długo spełniona jest nierówność:

$$(n-i)-(i-1)=n-2i+1 \geqslant 1$$
$$i \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

Gdzie i to długość boku trójkąta, (n - i) to długość linii poziomej zawartej w siatce trójkątnej na wysokości n od podstawy, a (i - 1) to ilość trójkątów o boku i, których podstawa nie mieściła by się w całości na tej linii gdyby przy każdym odcinku podstawić trójkąt o boku i. Tym warunkiem sprawdzamy jak duże trójkąty mogą się mieścić w siatce trójkątnej (tzn. kiedy ich ilość przestanie być dodatnia, a tym samym znaczenie i sens). Największym trójkątem zwróconym do góry jest oczywiście trójkąt o boku n.

Zauważmy że w siatce trójkątnej o boku n:

$$\Delta_k^+ = n-k+1$$
$$\Delta_k^- = (n-k)-(k-1) = n-2k+1$$

Możemy teraz wyprowadzić wzór rekurencyjny na t_n:

$$t_n = t_{n-1} + \Delta_1^+ + \Delta_2^+ + ... + \Delta_n^+ + \Delta_1^- + \Delta_2^- + ... + \Delta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- =$$
$$= t_{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^+ + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Delta_i^- =$$
$$= t_{n-1} + \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2i+1) =$$
$$= t_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i =$$
$$= t_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) =$$
$$= t_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2} + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$$

Obliczmy wzór zwarty na t_n:

$$
\begin{aligned}
t_0 &= 1 \\
t_n &= t_0 + \sum_{i=2}^{n}(\frac{i(i+1)}{2} + \lfloor\frac{i}{2}\rfloor(i - \lfloor\frac{i}{2}\rfloor)) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\frac{i(i+1)}{2} + \lfloor\frac{i}{2}\rfloor(i - \lfloor\frac{i}{2}\rfloor)) = // \text{ tu dzielimy sumę na parzyste i nieparzyste wyrazy} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\frac{i^{\underline{2}}}{2} + i^{\underline{1}}) + \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(i((2i)-i) - i((2i-1)-i)) + [2 \nmid n](\lfloor\frac{n}{2}\rfloor(n - \lfloor\frac{n}{2}\rfloor))) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\frac{i^{\underline{2}}}{2} + i^{\underline{1}}) + \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(2i^{\underline{2}} + i^{\underline{1}}) + [2 \nmid n](\lfloor\frac{n}{2}\rfloor(n - \lfloor\frac{n}{2}\rfloor))) = \\
&= (\frac{(i+1)^{\underline{3}}}{6} + \frac{(i+1)^{\underline{2}}}{2})|_1^{n+1} + (\frac{2i^{\underline{3}}}{3} + \frac{i^{\underline{2}}}{2})|_1^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1} + [2 \nmid n]\lfloor\frac{n}{2}\rfloor(n - \lfloor\frac{n}{2}\rfloor)) = \\
&= \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{6} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} + \frac{2(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)^{\underline{3}}}{3} + \frac{(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)^{\underline{2}}}{2} + [2 \nmid n]\lfloor\frac{n}{2}\rfloor(n - \lfloor\frac{n}{2}\rfloor)) = \\
&= \frac{1}{8}(2n^3 + 5n^2 + 2n - [2 \nmid n])
\end{aligned}
$$

Zatem dla dowolnego $n \geqslant 1$ w siatce trójkątnej o boku n znajduje się $\frac{1}{8}(2n^3 + 5n^2 + 2n - [2 \nmid n])$ trójkątów.