MD'2010, zadanie domowe nr 3

termin: 2010-03-18

Udowodnij tożsamości

(a) $\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_{n-k} \le k} i_1 \cdot i_2 \cdots i_{n-k}$;

(b) $\left[{n \atop k} \right] = \sum_{0 < i_1 < \ldots < i_{n-k} < n} i_1 \cdot i_2 \cdots i_{n-k}$.

Zadanie 3

Xilexio

Udowodnijmy, że:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_{n-k} \leqslant k} i_1 i_2 \ldots i_{n-k} \tag{1}$$

Dla wygody przyjmijmy oznaczenie:

$$S_2(n,k) = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_{n-k} \leqslant k} i_1 i_2 \ldots i_{n-k}$$

Do udowodnienia (1) użyjmy indukcji matematycznej. Na parach liczb naturalnych (n,k) weźmy porządek leksykograficzny. Wtedy każdy podzbiór posiada element minimalny (ze względu na własności liczb naturalnych). Ustalamy, że pusta suma pustych iloczynów jest równa 1. Ta suma ma sens dla $n \geqslant k \geqslant 0$. Udowodnijmy podstawę indukcji (w poniższych sumach występuje pusty zbiór po którym sumujemy):

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_{n-k} \leqslant 0} i_1 i_2 \ldots i_n = 0 = \left\{ {n \atop 0} \right\}$$

$$\sum_{1 \leqslant 0} = 1 = \left\{ {0 \atop 0} \right\}$$

Udowodnijmy teraz krok indukcyjny. Zakładamy, że (1) jest prawdą dla $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ i $k \in \mathbb{N}$. Udowodnijmy, że jest to prawda dla n i $k \in \mathbb{N}_+$. Zapiszmy tą sumę inaczej i zmieńmy granice sumowania:

$$\begin{aligned}
&S_2(n,k) = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_{n-k} \leqslant k} i_1 i_2 \ldots i_{n-k} = \sum_{i_1=1}^{k} i_1 \sum_{i_2=i_1}^{k} i_2 \ldots \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}}^{k} i_{n-k} = \\
&= \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \sum_{i_2=i_1}^{k} i_2 \ldots \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}}^{k} i_{n-k} + k^{n-k} = \ldots = \\
&= \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \sum_{i_2=i_1}^{k-1} i_2 \ldots \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}}^{k-1} i_{n-k} + k^{n-k} + \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \cdot k^{n-k-1} + \ldots + \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \sum_{i_2=i_1}^{k-1} i_2 \ldots \sum_{i_{n-k-1}=i_{n-k-2}}^{k-1} i_{n-k-1} \cdot k = \\
&= k^{n-k} + \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \left(k^{n-k-1} + \sum_{i_2=i_1}^{k-1} i_2 \left(k^{n-k-2} + \ldots \sum_{i_{n-k-1}=i_{n-k-2}}^{k-1} i_{n-k-1} \left(k + \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}}^{k-1} i_{n-k} \right) \ldots \right) \right) = \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \sum_{i_2=i_1}^{k-1} i_2 \ldots \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}}^{k-1} i_{n-k} \right) + \\
&+ k \left(k^{n-k-1} + \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \left(k^{n-k-2} + \sum_{i_2=i_1}^{k-1} i_2 \left(k^{n-k-3} + \ldots \sum_{i_{n-k-2}=i_{n-k-3}}^{k-1} i_{n-k-2} \left(k + \sum_{i_{n-k-1}=i_{n-k-2}}^{k-1} i_{n-k-1} \right) \ldots \right) \right) \right) = \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \sum_{i_2=i_1}^{k-1} i_2 \ldots \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}}^{k-1} i_{n-k} \right) + k \left(\sum_{i_1=1}^{k} i_1 \sum_{i_2=i_1}^{k} i_2 \ldots \sum_{i_{n-k-1}=i_{n-k-2}}^{k} i_{n-k-1} \right) = \\
&= S_2(n-1, k-1) + kS_2(n, k-1)
\end{aligned}$$

To nam daje wzór rekurencyjny na liczby Stirlinga 2 rodzaju, zatem (1) jest prawdziwe.

Analogicznie udowodnijmy teraz, że:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{0<i_1<...<i_{n-k}<n} i_1 i_2 ... i_{n-k} \tag{2}$$

Dla wygody przyjmijmy oznaczenie:

$$S_1(n,k) = \sum_{0<i_1<...<i_{n-k}<n} i_1 i_2 ... i_{n-k}$$

Do udowodnienia (2) użyjmy indukcji matematycznej. Na parach liczb naturalnych (n,k) weźmy porządek leksykograficzny. Wtedy każdy podzbiór posiada element minimalny (ze względu na własności liczb naturalnych). Ustalamy, że pusta suma pustych iloczynów jest równa 1. Ta suma ma sens dla $n \geqslant k \geqslant 0$. Udowodnijmy podstawę indukcji(w poniższych sumach występuje pusty zbiór po którym sumujemy):

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \sum_{0<i_1<...<i_n<n} i_1 i_2 ... i_{n-k} = 0 = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{0<0} = 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Udowodnijmy teraz krok indukcyjny. Zakładamy, że (2) jest prawdą dla $\{0, 1, ..., n-1\}$ i $k \in \mathbb{N}$. Udowodnijmy, że jest to prawda dla n i $k \in \mathbb{N}_+$. Zapiszmy tą sumę inaczej i zmieńmy granice sumowania:

$$\begin{aligned}
S_1(n,k) &= \sum_{0<i_1<...<i_{n-k}<n} i_1 i_2 ... i_{n-k} = \sum_{i_1=1}^{k} i_1 \sum_{i_2=i_1+1}^{k+1} i_2 ... \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}+1}^{n-1} i_{n-k} = \\
&= \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \sum_{i_2=i_1+1}^{k+1} i_2 ... \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}+1}^{n-1} i_{n-k} + k(k+1)...(n-1) = ... = \\
&= \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \sum_{i_2=i_1+1}^{k} i_2 ... \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}+1}^{n-2} i_{n-k} + \\
&+ k(k+1)...(n-1) + \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \cdot (k+1)(k+2)...(n-1) + ... + \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \sum_{i_2=i_1+1}^{k} i_2 ... \sum_{i_{n-k-1}=i_{n-k-2}+1}^{n-3} i_{n-k-1} \cdot (n-1) = \\
&= k(k+1)...(n-1) + \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \Bigg((k+1)(k+2)...(n-1) + \\
&+ \sum_{i_2=i_1+1}^{k} i_2 \Bigg((k+2)(k+3)...(n-1) + ... \sum_{i_{n-k-1}=i_{n-k-2}+1}^{n-3} i_{n-k-1} \Bigg((n-1) + \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}+1}^{n-2} i_{n-k} \Bigg) ... \Bigg) \Bigg) = \\
&= \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \sum_{i_2=i_1+1}^{k} i_2 ... \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}+1}^{n-2} i_{n-k} + (n-1) \Bigg(k(k+1)...(n-2) + \\
&+ \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \Bigg((k+1)(k+2)...(n-2) + \sum_{i_2=i_1+1}^{k} i_2 \Bigg((k+2)(k+3)...(n-2) + ... \sum_{i_{n-k-1}=i_{n-k-2}+1}^{n-3} i_{n-k-1} ... \Bigg) \Bigg) \Bigg) = \\
&= \sum_{i_1=1}^{k-1} i_1 \sum_{i_2=i_1+1}^{k} i_2 ... \sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}+1}^{n-2} i_{n-k} + (n-1) \sum_{i_1=1}^{k} i_1 \sum_{i_2=i_1+1}^{k+1} i_2 ... \sum_{i_{n-k-1}=i_{n-k-2}+1}^{n-2} i_{n-k-1} = \\
&= S_1(n-1, k-1) + (n-1) S_1(n-1, k)
\end{aligned}$$

To nam daje wzór rekurencyjny na liczby Stirlinga 1 rodzaju, zatem (2) jest prawdziwe.