MD'2010, zadanie domowe nr 4

termin: 2010-03-25

Niech S_n oznacza liczbę funkcji $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ „bez dziur", tzn. takich, że jeśli f przyjmuje wartość i, to przyjmuje również wszystkie wartości j, dla $1 \leq j < i$ (w szczególności $S_0 = 1$). Wyznacz wykładniczą funkcję tworzącą ciągu S_n i udowodnij, że $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$.

Wskazówka: Znajdź równanie rekurencyjne na S_n, podobne do równania na liczby Bella.

Zadanie 4

Xilexio

Znajdźmy najpierw wzór na S_n. Zauważmy że w funkcje liczone do S_{n+1} to suma rozłącznych zbiorów funkcji mających dla $n+1-k$ argumentów jedynkę w wartościach i dla pozostałych k argumentów funkcje liczone do S_n przesunięte w górę o 1 (których jest oczywiście tyle samo co oryginalnych S_n), dla $0 \leqslant k \leqslant n$. Innymi słowy, rozważamy miejsca na wykresie funkcji na których mamy jedynkę oraz miejsca, na których jedynki nie mamy, ale nie powodują dziur, czyli odpowiednie funkcje bez dziur przesunięte o 1 w górę. Zatem:

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} S_k \\ S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} S_k \end{aligned}$$

Policzmy zatem wykładniczą funkcję tworzącą S_n, którą nazwiemy $S(x)$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} \\ S(x) - S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} S_k \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} S_k \right) - S_n \right) \frac{x^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} S_k x^n - \sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} \\ 2 \sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} S_k x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} S_k x^n - S_0 = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_k \frac{x^n}{n!} \right) - S_0 = e^x S(x) - S_0 \\ 2S(x) - 2S_0 &= e^x S(x) - S_0 \\ S(x) &= \frac{S_0}{2 - e^x} = \frac{1}{2 - e^x} \end{aligned}$$

A teraz policzmy wykładniczą funkcję tworzącą $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}} \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^x}{2} \right)^k = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{e^x}{2}\right)} = \frac{1}{2 - e^x} = S(x)$$

Widzimy, że wykładnicza funkcja tworząca ciągu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$ jest równa wykładniczej funkcji tworzącej ciągu S_n, zatem te ciągi są równe.