MD'2010, zadanie domowe nr 5

termin: 2010-04-08

Udowodnij, że liczba rozstawień k nie atakujących się wież na planszy

$$B = \{(i,j) : 1 \leq i \leq j \leq n\} \setminus \{(1,n)\}$$

jest równa $\left\{ {n+1 \atop n+1-k} \right\} - \left\{ {n-1 \atop n-k} \right\}$.

Zadanie 5

Xilexio

Na początek ustalmy, że $n \geqslant 0$ i $k \geqslant 0$, bo tylko wtedy zadanie ma logiczny sens. Rozpatrzmy najpierw planszę A z rogiem, tzn. $A = B \cup \{(1, n)\}$. Aby sobie łatwiej wyobrażać planszę, ustalmy że pierwszy współczynnik to numer wiersza, a drugi to kolumny oraz że numerujemy kolumny i wiersze od lewego dolnego rogu. Oznaczmy ilość rozstawień nieatakujących się wież na planszy A i B dla podanych n i k przez $A_{n,k}$ i $B_{n,k}$.

Zauważmy, że na planszy A w ostatniej (n-tej) kolumnie może nie być wieży i wtedy k wież musi być w reszcie (która też jest planszą A dla n pomniejszonego o 1). W przeciwnym przypadku jest jedna wieża (kolejna atakowałaby już istniejącą) i może stać na nieatakowanym polu. Jako że w pozostałej części jest $k-1$ wież i każda z nich atakuje jakieś pole ostatniej kolumny to wieża w ostatniej kolumnie może stać na jednym z $n-k+1$ nieatakowanych pól. To oraz przypadki graniczne opisane jest poniżej:

$$n < k \Rightarrow A_{n,k} = 0 \tag{1}$$

$$k = 0 \Rightarrow A_{n,k} = 1 \tag{2}$$

$$n \geqslant k > 0 \Rightarrow A_{n,k} = A_{n-1,k} + (n+1-k)A_{n-1,k-1} \tag{3}$$

Udowodnijmy że:

$$A_{n,k} = \left\{ {n+1 \atop n+1-k} \right\} \tag{4}$$

Skorzystajmy z znajomości wzoru rekurencyjnego na liczby Stirlinga 2 rodzaju. Przypadek specjalny (1) dla $n < k$ daje poprawny wynik. Dla (2) wynik również się zgadza. Rekurencja (3) jest również spełniona, bo:

$$\left\{ {n+1 \atop n+1-k} \right\} = \left\{ {n \atop n-k} \right\} + (n+1-k) \left\{ {n \atop n+1-k} \right\}$$
$$A_{n,k} = A_{n-1,k} + (n-1+k)A_{n-1,k-1}$$

Wszystkie warunki brzegowe, które możemy wyliczając $A_{n,k}$ uzyskać zawierają się w (1) lub (2), bo w $A_{n-1,k}$ możemy tylko dojść do przypadku (1), a w $A_{n-1,k-1}$ do przypadku (2). Nie jest możliwe zejść do przypadku z $n < 0$ ani $k < 0$. Skoro osiągalne warunki początkowe się zgadzają i sama rekurencja się zgadza to wzór (4) na $A_{n,k}$ jest poprawny.

Teraz zauważmy, że plansza A uwzględnia wszystkie układy wież z planszy B oraz te układy w których jedna wieża stoi w rogu $(1, n)$ a pozostałe $k-1$ wież stoi gdzieś w polu nieatakowanym przez wieżę w rogu, tzn. na takiej samej planszy A dla n pomniejszonego o 2. Można to zapisać wzorem:

$$A_{n,k} = B_{n,k} + A_{n-2,k-1}$$

Zatem uwzględniając (4):

$$B_{n,k} = A_{n,k} - A_{n-2,k-1} = \left\{ {n+1 \atop n+1-k} \right\} - \left\{ {n-1 \atop n-k} \right\}$$

Co daje równość z treści zadania.