MD'2010, zadanie domowe nr 6

termin: 2010-04-15

Udowodnij, że wierzchołki silnie spójnego grafu skierowanego G można pomalować z użyciem dwóch kolorów tak, żeby każdy wierzchołek x był połączony z pewnym wierzchołkiem y *innego koloru* skierowaną krawędzią $\langle x, y \rangle$, wtedy i tylko wtedy, gdy G zawiera cykl parzystej długości.

Zadanie 6

Xilexio

1 Teza

Niech $G = \langle W, K \rangle$, $W \subset \mathbb{N}$ i $K \subset W \times W$ (odpowiednio początek i koniec), gdzie G jest grafem silnie spójnym skierowanym opisanym za pomocą jego ponumerowanych liczbami naturalnymi wierzchołków W i z krawędziami skierowanymi K. Chcemy dowieść:

Można pokolorować wierzchołki grafu G dwoma kolorami tak, żeby dla każdego wierzchołka x istniała krawędź $\langle x, y \rangle$ do wierzchołka y innego koloru niż $x \Leftrightarrow$ Graf G zawiera cykl parzystej długości

2 Dowód

Graf o jednym wierzchołku nie zawiera cyklu i z tego wierzchołka nie istnieje krawędź prowadząca do innego wierzchołka. Graf o dwóch wierzchołkach aby był silnie spójny musi być cyklem długości 2, a więc parzystej. Twierdzenie jest prawdziwe więc dla grafów o 1 lub 2 wierzchołkach, dlatego dalej zakładamy że graf ma przynajmniej 3 wierzchołki.

2.1 Dowód $\Rightarrow$

Bierzemy ten graf pokolorowany na 2 kolory i wybieramy jakiś wierzchołek w_1. Z niego idziemy krawędzią skierowaną należącą do grafu do wierzchołka w_2 o innym kolorze, potem z w_2 do w_3 o innym kolorze itd. Powtarzamy ten proces aż $\exists_i \exists_{j>i} w_i = w_j$. Wierzchołków jest skończenie wiele, a graf jest silnie spójny, więc mamy pewność, że kiedyś tak się stanie.

Mamy wtedy cykl wierzchołków $\langle w_i, w_{i+1}, ..., w_j \rangle$, w którym wierzchołki mają naprzemiennie kolory, zatem jest on parzystej długości.

2.2 Dowód $\Leftarrow$

Niech P będzie zbiorem wierzchołków tworzących cykl parzystej długości C. Zdefiniujmy odległość wierzchołka v od zbioru wierzchołków V, funkcję δ dla $v \notin V$:

$$\delta(v, V) = \inf \left\{ d : \exists_{\langle a_i \rangle_{i=1}^{d} \subset W} a_1 = v \wedge a_d \in V \wedge \forall_{j<d} \langle a_j, a_{j+1} \rangle \in K \right\}$$

Dla $v \in V$ niech $\delta(v, V) = 0$. Jest to po prostu ilość krawędzi, które trzeba pokonać startując w v, aby znaleźć się w V.

Teraz chcemy usunąć nadmiarowe krawędzie poza krawędziami tworzącymi cykl C tak, by zostały tylko te tworzące drzewa o korzeniu w wierzchołkach z P oraz sam cykl C. Dokładniej, usuwamy wszystkie krawędzie $\langle a, b \rangle$ z $K \setminus C$ spełniające warunek $\delta(a, P) \neq \delta(b, P) + 1 \vee \left(\exists_{\langle a, c \rangle \in K} \delta(a, P) = \delta(c, P) + 1 \wedge c < b \right)$ (wierzchołki grafu to numery im przyporządkowane) oraz wszystkie krawędzie pomiędzy wierzchołkami P poza krawędziami z cyklu C. Innymi słowy, z krawędzi pomiędzy wierzchołkami P zostawiamy tylko cykl C, usuwamy krawędzie prowadzące od wierzchołków P i z wierzchołków prowadzących do grafu zostawiamy dokładnie jeden.

Zawsze istnieje przynajmniej jeden, bo z silnej spójności grafu istnieje droga prowadząca z każdego wierzchołka z W do każdego z wierzchołków z P. Operacja zastosowana powyżej powoduje, że z każdego wierzchołka z $W \setminus P$ można się tylko przybliżyć do P oraz, co najważniejsze, C jest jedynym cyklem w grafie (zatem bez krawędzi z C mamy drzewa). Z każdego wierzchołka możemy się dostać do P, wystarczy iść jedyną istniejącą krawędzią wychodzącą, aż trafi się do P. A trafi się, bo krawędź wychodząca zawsze istnieje (wynika to z konstrukcji powyższej operacji - odległość mierzona za pomocą δ mierzy po prostu ile krawędzi trzeba przejść aby trafić do P). Usunięte wierzchołki nazwijmy D.

Teraz bierzemy kredki. Wierzchołki P łatwo pokolorować idąc po kolei zgodnie z cyklem C i kolorując je na przemian (tzn. kolorujemy na jeden kolor parzyste elementy ciągu C, a na drugi nieparzyste). Teraz rozpatrzmy graf $H = \langle W, K \setminus (D \cup C) \rangle$. Jest to po prostu $|P|$ drzew z skierowanymi w kierunku korzenia krawędziami i już pokolorowanymi korzeniami (czyli wierzchołkami z P).

Drzewo można łatwo kolorować - po prostu idąc od korzenia (w stronę przeciwną do kierunku krawędzi) kolorujemy naprzemiennie, czy bardziej formalnie, wierzchołki v z danego drzewa o $\delta(v, P)$ nieparzystym kolorujemy na kolor inny niż korzeń, a te o parzystym na taki sam kolor.

W ten sposób mamy pokolorowane wszystkie wierzchołki W. A jako że graf $I = \langle W, K \setminus D \rangle$ miał tą właściwość, że z wszystkich wierzchołków wychodziła przynajmniej jedna krawędź do wierzchołka o innym kolorze (bo z każdego wierzchołka wychodziła krawędź do dokładnie jednego wierzchołka i ten wierzchołek był innego koloru), to graf G zawierający w sobie wszystkie krawędzie grafu I też ma tą właściwość.