MD'2010, zadanie domowe nr 8

termin: 2010-04-29

Ciąg a_n jest określony wzorem rekurencyjnym $a_0 = 3$, $a_n = f(a_{n-1})$ dla $n > 0$, gdzie $f(x) = x \ln x$. Rozstrzygnij, co rośnie szybciej: a_n czy $n!$.

Zadanie 8

Xilexio

Twierdzę, że a_n rośnie szybciej niż $n!$. Mam więc dowieść, że:

$$\frac{a_n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \tag{1}$$

Widać, że a_n jest rosnący (bo w każdym kroku mnożymy jego poprzednią, dodatnią wartość przez coś równego przynajmniej $\ln 3 > 1$). Oczywiście $n!$ też jest rosnąca. Poniżej często korzystam z faktu, że $a_0 > 1$, $\ln a_0 > 1$ oraz że $\ln\ln a_0 > 0$.

Udowodnię teraz, że:

$$\exists_{k>0}\forall_{i>k} \ln a_i > i+1 \tag{2}$$

$$a_i = a_{i-1}\ln a_{i-1} > a_{i-1}\ln a_0 > ... > a_0(\ln a_0)^i$$

$$\ln a_i = \ln a_{i-1} + \ln\ln a_{i-1} = \ln a_{i-2} + \ln\ln a_{i-2} + \ln\ln a_{i-1} = ... = \ln a_0 + \sum_{i=0}^{i-1}\ln\ln a_i > 1 + \sum_{i=0}^{i-1}\ln\ln a_i$$

Znajdźmy takie l aby:

$$\ln\ln a_l > 1 \tag{3}$$

$$\ln\ln a_l > \ln\ln(a_0(\ln a_0)^l) = \ln\ln(la_0\ln a_0) > \ln\ln l$$

Dla $l \geqslant 16$ nierówność (3) jest spełniona. Kontynuując:

$$\ln a_i > 1 + \sum_{i=0}^{i-1}\ln\ln a_i > 1 + (i-l)\ln\ln a_l$$

Szukamy teraz k:

$$1 + (i-l)\ln\ln a_l \geqslant 1 + i$$
$$i \geqslant \frac{l\ln\ln a_l}{\ln\ln a_l - 1}$$

Zatem $k = \lceil\frac{l\ln\ln a_l}{\ln\ln a_l - 1}\rceil$ spełnia (2).

W takim razie spójrzmy na rekurencję ($i > 0$):

$$a_0 = 3$$
$$a_i = a_{i-1}\ln a_{i-1}$$
$$i > k \Rightarrow a_i > a_{i-1}(1+i)$$
$$0! = 1$$
$$i! = (i-1)!i$$

Obliczmy ($n > k+1$):

$$\frac{a_n}{n!} > \frac{a_{n-1}(1+n)}{(n-1)!n} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\frac{1+n}{n} > ... > \frac{a_k}{k!}\prod_{i=k+1}^{n}\frac{1+i}{i} = (1+n)\frac{a_k}{k!(k+1)} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Zatem udowodniłem, że (1) zachodzi, więc a_n rośnie szybciej niż $n!$.